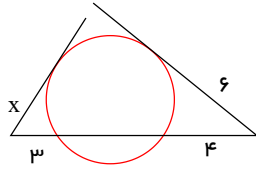
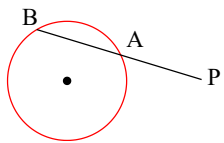


۱- در شکل مقابل اندازه  $x$  چند واحد است؟



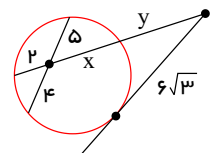
- (۱)  $3\sqrt{2}$   
(۲)  $2\sqrt{5}$   
(۳)  $2\sqrt{6}$   
(۴) ۵

۲- نزدیکترین نقطه از دایره به شعاع ۵ واحد تا نقطه مفروض  $P$  برابر ۸ واحد است. قاطع  $PAB$  نسبت به دایره طوری رسم شده است که



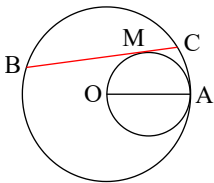
- (۱) ۵  
(۲) ۶  
(۳) ۷  
(۴) ۹

$PA - AB = ۲$  اندازه  $AB$  چقدر است؟



- (۱) ۶  
(۲) ۷٫۵  
(۳) ۸  
(۴) ۹

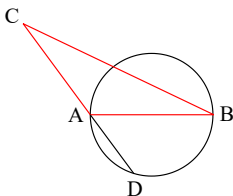
۳- در شکل مقابل مقدار  $y$  کدام است؟



۴- در دایره‌ای به شعاع  $OA$  وتر  $BC$  مماس بر دایره‌ای به قطر  $OA$  رسم شده است. مقدار  $MC \times MB$ ، برابر کدام است؟

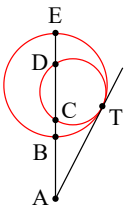
- (۱)  $MO^2$   
(۲)  $MA^2$   
(۳)  $OA^2$   
(۴)  $MA \cdot MO$

۵- در شکل مقابل  $AB = AC = 1$  و  $AB$  قطر دایره است. اگر  $AD = \frac{2}{3}$ ، مساحت مثلث  $ABC$  کدام است؟



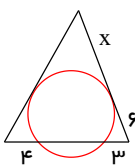
- (۱)  $\frac{\sqrt{5}}{6}$   
(۲)  $\frac{\sqrt{6}}{5}$   
(۳)  $\frac{1}{3}$   
(۴)  $\frac{2}{5}$

۶- در شکل مقابل  $AT$  در نقطه‌ی  $T$  بر هر دو دایره مماس است. اگر  $AB = 5$  و  $AD = 11$  و  $CE = 9$  باشد، آن‌گاه اندازه‌ی  $AC$  برابر کدام است؟



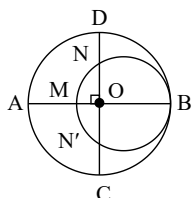
- (۱) ۷  
(۲) ۷٫۵  
(۳) ۸  
(۴) ۸٫۵

۷- اگر در مثلث مقابل محیط مثلث برابر  $2\sqrt{13} + 24$  باشد،  $x$  کدام است؟



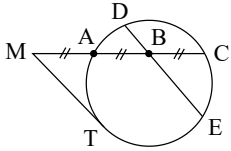
- (۱) ۱  
(۲)  $\frac{3}{2}$   
(۳) ۲  
(۴)  $\frac{5}{2}$

۸- در شکل روبه‌رو، اگر  $AM = 16$  و  $ND = 10$ ، شعاع دایره کوچک‌تر چقدر است؟



- (۱) ۲۵  
(۲) ۲۰  
(۳) ۱۷  
(۴) ۱۳

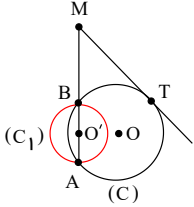




۹- در شکل مقابل،  $MA = AB = BC$ ، اگر  $BD = 4$  و  $BE = 9$ ، طول مماس  $MT$  کدام است؟

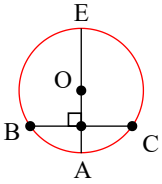
- ۱) ۱۸
- ۲)  $4\sqrt{3}$
- ۳) ۱۲
- ۴)  $6\sqrt{3}$

۱۰- در شکل روبه‌رو، مرکز دایره‌ی  $C_1(O', 3)$  روی وتر مشترک دو دایره یعنی  $AB$  قرار دارد و  $MT$  بر دایره‌ی  $(C)$  مماس است. اگر  $MB = 9$  و  $MO = \sqrt{184}$  باشد اندازه شعاع دایره‌ی  $(C)$  چقدر است؟



- ۱) ۵
- ۲) ۵٫۵
- ۳) ۶
- ۴) ۷

۱۱- در شکل زیر وتر  $BC$ ، عمود منصف شعاع  $OA$  می‌باشد طول  $BE$  چند برابر طول  $AB$  می‌باشد؟

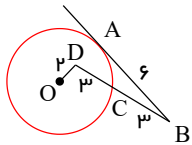


- ۱) ۲
- ۲)  $\sqrt{2}$
- ۳) ۳
- ۴)  $\sqrt{3}$

۱۲- فاصله‌ی نزدیک‌ترین نقطه‌ی دایره‌ای تا نقطه‌ی  $A$ ، چهار برابر شعاع دایره است. طول مماس مرسوم از نقطه‌ی  $A$  بر دایره چند برابر شعاع دایره است؟

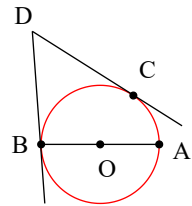
- ۱)  $2\sqrt{2}$
- ۲)  $2\sqrt{6}$
- ۳)  $\sqrt{15}$
- ۴)  $6\sqrt{2}$

۱۳- در شکل داده شده  $AB$  در  $A$  بر دایره‌ی  $O$  مماس است،  $D$  نقطه‌ای است داخل دایره و  $DB$  در  $C$  با دایره برخورد کرده است، اگر  $OD = 2$  و  $BC = DC = 3$  و  $AB = 6$  آن گاه شعاع دایره کدام است؟



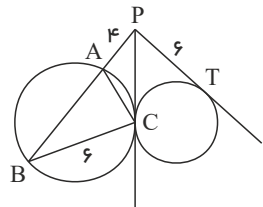
- ۱)  $2\sqrt{5}$
- ۲)  $\frac{9}{2}$
- ۳)  $\sqrt{22}$
- ۴)  $\frac{15}{\pi}$

۱۴- در شکل مقابل  $AB$  قطر و  $DB$  و  $DC$  مماس دایره‌اند اگر  $AC = 6$  و  $BC = 8$  باشد، طول  $DB$  کدام است؟



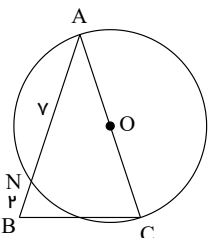
- ۱)  $\frac{20}{7}$
- ۲)  $\frac{19}{3}$
- ۳) ۷
- ۴)  $\frac{20}{3}$

۱۵- در شکل زیر، دو دایره در نقطه‌ی  $C$  مماس برون‌اند. همچنین  $P$  روی مماس مشترک داخلی دو دایره واقع بوده و  $PT$  بر دایره مماس است. اگر  $PT = 6$  و  $AP = 4$  و  $BC = 6$  باشد، طول پاره‌خط  $AC$  کدام است؟



- ۱) ۲
- ۲) ۴
- ۳)  $\frac{5}{2}$
- ۴)  $\frac{3}{2}$

۱۶- در شکل زیر مثلث  $ABC$  در رأس  $A$  متساوی‌الساقین،  $AN = 7$  و  $BN = 2$  و  $O$  مرکز دایره است. اندازه‌ی قاعده‌ی  $BC$  کدام است؟



- ۱) ۴
- ۲) ۴٫۸
- ۳) ۶
- ۴) ۷٫۲





۱۷- در دایره‌ای به مرکز  $O$ ، وتر  $AB$  با وتر  $AC$  برابر است و وتر  $AD$  با  $BC$  در  $E$  برخورد می‌کند، اگر  $AE = 16$  و  $ED = 9$  باشد،  $AB$  کدام است؟

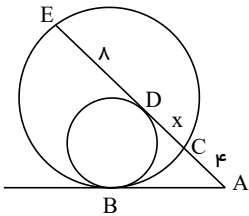
۹ (۴)

۱۲ (۳)

۱۶ (۲)

۲۰ (۱)

۱۸- در شکل زیر، دو دایره در نقطه  $B$  مماس درون‌اند. اگر مماس رسم شده بر دایره کوچک‌تر در نقطه  $D$ ، دایره بزرگ‌تر را در نقاط  $C$  و  $E$  مماس رسم شده در نقطه  $B$  را در نقطه  $A$  قطع کند، آن گاه طول  $CD$  کدام است؟ ( $AC = 4$  و  $DE = 8$ )



۳ (۲)

۲ (۱)

۵ (۴)

۴ (۳)

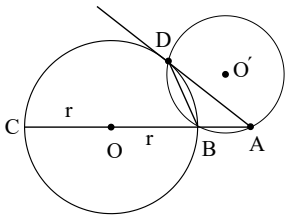
۱۹- در شکل مقابل اگر شعاع دایره‌ی محیطی  $\triangle ABD$  و شعاع دایره‌ی دیگر باشد، نسبت  $\frac{AB}{BD}$  کدام است؟

$\frac{1}{2} \times \frac{R}{r}$  (۲)

$\frac{R}{r}$  (۱)

$\sqrt{\frac{R}{r}}$  (۴)

$\frac{R^2}{r^2}$  (۳)



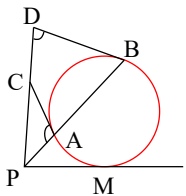
۲۰- در شکل زیر  $\widehat{PAC} = \widehat{PDB}$ ،  $PC = 9$  و  $CD = 7$ ، اندازه‌ی مماس  $PM$  چه قدر است؟

$6\sqrt{2}$  (۲)

۸ (۱)

۱۲ (۴)

۱۰ (۳)





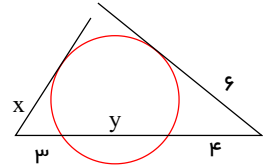


## پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۳

$$6^2 = 4(4 + y) \Rightarrow 36 = 4(4 + y) \Rightarrow y = 5$$

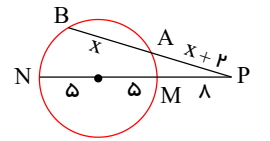
$$x^2 = 3(3 + 5) \Rightarrow x = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$



۲ - گزینه ۳ اگر  $AB$  را  $x$  در نظر بگیریم آنگاه از فرض نتیجه می‌گیریم  $PA = x + 2$  حال از رابطه طولی در دایره استفاده کرده، داریم:

$$(2x + 2)(x + 2) = 8 \times 18$$

$$(x + 1)(x + 2) = 8 \times 9$$



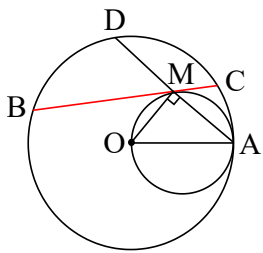
$$x^2 + 3x - 70 = 0 \Rightarrow (x - 7)(x + 10) = 0 \Rightarrow x = 7 \Rightarrow AB = 7$$

۳ - گزینه ۱

$$2x = 4 \times 5 \Rightarrow x = 10 \Rightarrow (6\sqrt{3})^2 = y(y + 12) \Rightarrow y^2 + 12y - 108 = 0 \Rightarrow y = 6$$

۴ - گزینه ۲

اگر از نقطه‌ی  $M$  به نقاط  $A$  و  $O$  وصل کنیم در این صورت زاویه‌ی  $M$  قائمه خواهد بود زیرا محاطی روبرو به قطر می‌باشد چون  $OM$  عمود بر وتر  $AD$  است پس  $MA = MD$  داریم:



$$MB \times MC = MA \times MD \xrightarrow{MA=MD} MB \times MC = MA^2$$

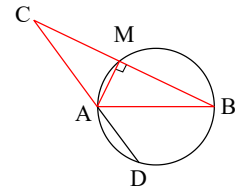
۵ - گزینه ۱ چون  $AB$  قطر دایره است، پس  $\hat{AMB} = 90^\circ$  و در مثلث متساوی‌الساقین  $ABC$ ،  $AM$  میانه نیز می‌باشد. بنا به روابط طولی در دایره داریم:

$$CA \times CD = CM \times CB \xrightarrow{CB=2CM} 1 \times (1 + \frac{2}{3}) = CM \times 2CM$$

$$\Rightarrow 2CM^2 = \frac{5}{3} \Rightarrow CM = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$$

$$AM^2 = AB^2 - MB^2 = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6} \Rightarrow AM = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

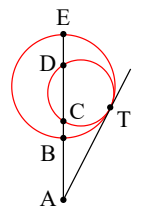
$$S_{\triangle(ABC)} = \frac{1}{2} AM \cdot BC = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{6}} \times \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{5}}{6}$$



۶ - گزینه ۲

$$\left. \begin{array}{l} \text{رابطه طولی} \quad AT^2 = AC \times AD \\ \text{رابطه طولی} \quad AT^2 = AB \times AE \end{array} \right\} \Rightarrow AC \times AD = AB \times (AC + CE)$$

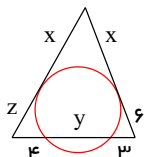
$$\Rightarrow AC \times 11 = 5(AC + 9) \Rightarrow 6AC = 45 \Rightarrow AC = 7.5$$

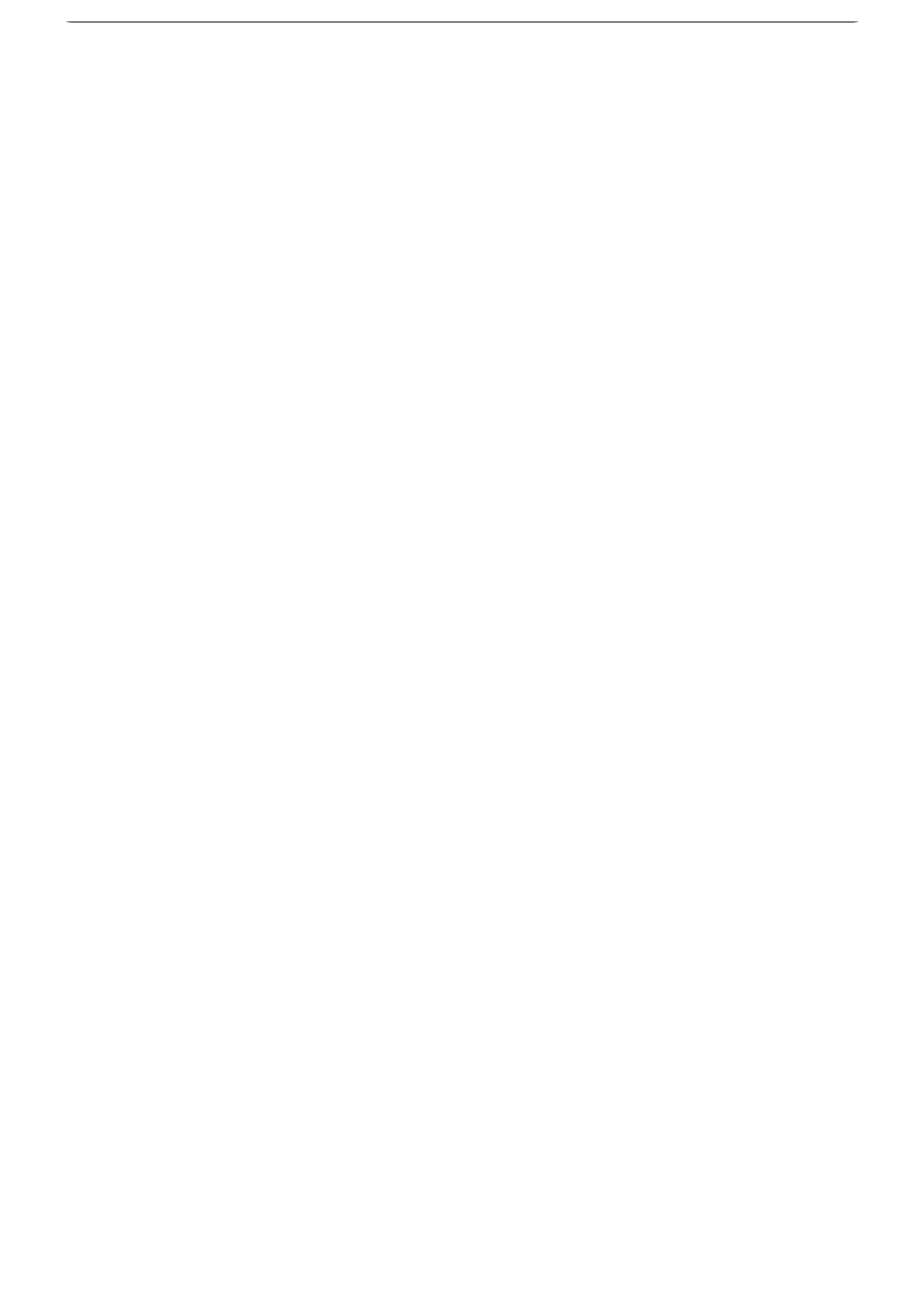


۷ - گزینه ۱ چون ۲ قطعه مماس از یک نقطه بر دایره هم‌طولند. براساس روابط در دایره داریم:

$$6^2 = 3 \times (3 + y) \Rightarrow 3 + y = \frac{36}{3} = 12 \Rightarrow y = 9, z^2 = 4 \times (4 + y) = 4 \times (13) \Rightarrow z = 2\sqrt{13}$$

$$\text{محیط مثلث} = 2x + 2\sqrt{13} + 4 + 9 + 3 + 6 = 2x + 2\sqrt{13} + 22 = 24 + 2\sqrt{13} \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1$$

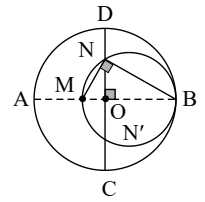








۸ - گزینه ۳



$$AM = 16, DN = 10$$

$$R = \text{شعاع دایره بزرگتر}$$

$$\Rightarrow ON = R - 10, OM = R - 16, OB = R$$

$$\triangle MNB : \widehat{N} = \widehat{O} = 90^\circ \Rightarrow ON^2 = OM \times OB$$

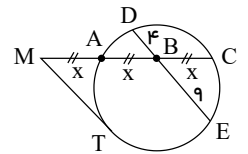
$$(R - 10)^2 = (R - 16) \times R \Rightarrow R^2 - 20R + 100 = R^2 - 16R \Rightarrow 4R = 100 \Rightarrow R = 25$$

$$\text{شعاع دایره کوچکتر} = \frac{MB}{2} = \frac{OM + OB}{2} = \frac{(25 - 16) + 25}{2} = 17$$

۹ - گزینه ۴ نکته: اگر از یک نقطه، یک مماس و یک قاطع نسبت به یک دایره رسم کنیم، قطعه‌ای از خط مماس که بین آن نقطه و نقطه‌ی تماس محصور است، واسطه‌ی هندسی بین دو قطعه‌ی قاطع است.

فرض کنیم  $MA = AB = BC = x$  در این صورت طبق روابط طولی در دایره داریم:

$$BA \times BC = BD \times BE \xrightarrow{\substack{BD=4 \\ BE=9}} \\ x^2 = 4 \times 9 = 36 \Rightarrow x = 6$$



حال با استفاده از نکته‌ی بالا داریم:

$$MT^2 = MA \cdot MC \Rightarrow MT^2 = x \times 3x$$

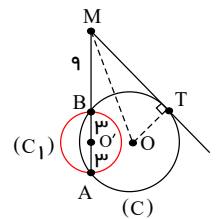
$$\xrightarrow{x=6} MT^2 = 3 \times 36 \Rightarrow MT = \sqrt{6^2 \times 3} = 6\sqrt{3}$$

$$MT^2 = MB \times MA$$

$$MT^2 = 9 \times 15 = 135$$

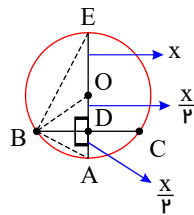
$$OT^2 = R^2 = MO^2 - MT^2 = 18^2 - 135 = 49 \Rightarrow R = 7$$

۱۰ - گزینه ۴



۱۱ - گزینه ۴

شعاع را  $x$  فرض می‌کنیم، پس:



$$OD = AD = \frac{x}{2} \Rightarrow ED = \frac{3}{2}x$$

$$\begin{cases} \text{مشترک } BD \\ OD = AD \Rightarrow \triangle OBD \cong \triangle ABD \Rightarrow AB = OB = x \\ \widehat{D} = 90^\circ \end{cases}$$

$$BD^2 + OD^2 = OB^2 \Rightarrow BD = \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

$$BD^2 + ED^2 = EB^2$$

و در مثلث  $OBD$  داریم:

حال می‌رویم سراغ مثلث  $EBD$  و داریم:



$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2 + \left(\frac{3}{2}x\right)^2 = EB^2 \Rightarrow EB = \sqrt{3}x$$

$$? = \frac{BE}{AB} = \frac{\sqrt{3}x}{x} = \sqrt{3}$$

و اما جمع بندی

راه دوم:

طبق روابط مثلث قائم الزاویه داریم:

$$\widehat{EBA} \text{ محاطی} = \frac{\widehat{AE}}{2} = 90^\circ, D = 90^\circ$$

$$BE^2 = DE \times AE = \frac{3}{2}x \times 2x \Rightarrow BE = \sqrt{3}x$$

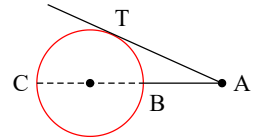
$$AB^2 = AD \times AE = \frac{x}{2} \times 2x = x^2 \Rightarrow AB = x \Rightarrow \frac{BE}{AB} = \frac{\sqrt{3}x}{x} = \sqrt{3}$$

۱۲ - گزینه ۲ دورترین و نزدیکترین نقاط یک دایره نسبت به نقطه‌ای خارج یا داخل آن دایره، محل تلاقی قطری از دایره یا امتداد قطری از دایره است که از نقطه‌ی  $A$  می‌گذرد.

$$BA = 4R$$

$$BC = 2R \Rightarrow AC = 6R$$

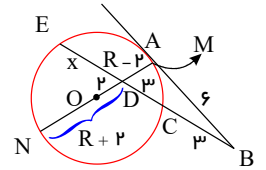
$$AT^2 = AB \times AC = 4R \times 6R = 24R^2 \Rightarrow AT = 2\sqrt{6}R$$



از روابط طولی در دایره داریم:

۱۳ - گزینه ۳  $OD$  و  $BD$  را امتداد می‌دهیم تا دایره را قطع کنند،  $AB$  واسطه‌ی هندسی بین  $BC$  و  $BE$  است، بنابراین:

$$3(6+x) = 6^2 \Rightarrow x = 6$$



حال وترهای  $EC$  و  $MN$  در نقطه‌ی  $D$  همدیگر را قطع کرده‌اند، بنابراین:

$$\text{رابطه‌ی طولی} : DM \times DN = DE \times DC \Rightarrow (R-2)(R+2) = 6 \times 3 \Rightarrow R^2 - 4 = 18 \Rightarrow R = \sqrt{22}$$

۱۴ - گزینه ۴

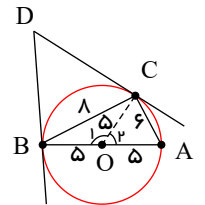
$$\triangle ABC : (AC)^2 + (BC)^2 = (AB)^2 \Rightarrow AB = 10$$

از طرفی در چهار ضلعی  $DBOC$  دو زاویه  $B$  و  $C$  قائمه هستند (شعاع در نقطه‌ی تماس بر مماس عمود است) داریم:

$$\begin{cases} \hat{O}_1 + \hat{O}_r = 180^\circ \\ \hat{O}_1 + D = 180^\circ \end{cases} \Rightarrow \hat{D} = \hat{O}_r$$

دو مثلث  $\triangle COA$ ،  $\triangle BDC$  متساوی الساقین و دارای زاویه رأس برابرند پس زاویه مجاور به قاعده برابر دارند پس متشابه‌اند:

$$\triangle COA \sim \triangle BDC \Rightarrow \frac{BD}{OC} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow \frac{BD}{5} = \frac{6}{6} \Rightarrow BD = \frac{20}{3}$$



۱۵ - گزینه ۲

$$\text{طبق روابط طولی} : PT^2 = PC^2, PC^2 = PA \times PB$$

$$\Rightarrow PT^2 = PA \times PB \Rightarrow 36 = 4 \times PB \Rightarrow PB = 9 = PA + AB = 4 + AB$$

$$4 + AB = 9 \Rightarrow AB = 5$$

$$\text{مشترک } \hat{P} : \hat{PCA} = \hat{B}, \hat{PCA} = \frac{\widehat{AC}}{2}, \hat{B} = \frac{\widehat{AC}}{2} \Rightarrow \hat{PCA} = \hat{B}$$

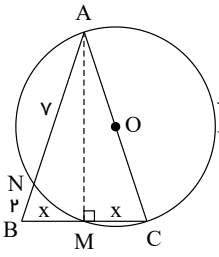
$$\Rightarrow \triangle PCA \sim \triangle PBC \Rightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{PA}{PC}, PC = PT = 6 \Rightarrow \frac{AC}{6} = \frac{4}{6} \Rightarrow AC = 4$$





۱۶ - گزینه ۳

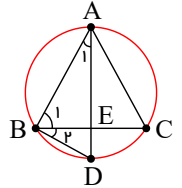
پاره خط  $AM$  را رسم می کنیم چون زاویه ی  $\widehat{AMC}$  روبه رو به قطر است، قائمه می باشد و چون در مثلث متساوی الساقین، ارتفاع وارد بر قاعده میانه نیز هست پس  $BM = MC$  می باشد بنابراین رابطه ی طولی در دایره داریم:



$$BM \times BC = BN \times AB \rightarrow x \times (2x) = 2 \times 9 \rightarrow x^2 = 9 \\ \rightarrow x = 3 \rightarrow BC = 2x = 6$$

۱۷ - گزینه ۱ دو مثلث  $\triangle ABD$  و  $\triangle ABE$  متشابهند زیرا:

$$\left. \begin{aligned} \widehat{B}_1 &= \frac{\widehat{AC}}{2} = \frac{\widehat{AB}}{2} \\ \widehat{D} &= \frac{\widehat{AB}}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \widehat{B}_1 = \widehat{D}, \widehat{A}_1 = \widehat{A}_1$$



از تشابه این دو مثلث نتیجه می گیریم:

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AB}{AD} \Rightarrow \frac{16}{AB} = \frac{AB}{16+9} \Rightarrow AB = 20$$

۱۸ - گزینه ۳

می دانیم مماس های رسم شده بر یک دایره برابرند:

$$AD = AB = x + 4$$

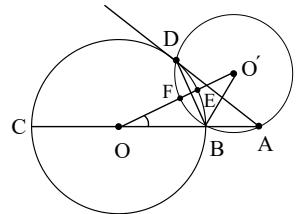
$$\text{طبق روابط طولی: } AB^2 = AC \times AE \Rightarrow (x + 4)^2 = 4(12 + x)$$

$$x^2 + 16 + 8x = 48 + 4x \Rightarrow x^2 + 4x - 32 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 4)(x + 8) = 0 \Rightarrow x = 4 \text{ و } x = -8 \text{ غ قی قی}$$

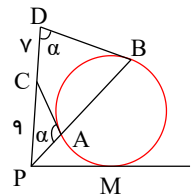
$$\widehat{O} = \widehat{BE} = \frac{\widehat{BD}}{2}, \widehat{BDA} = \frac{\widehat{BD}}{2} \Rightarrow \widehat{O} = \widehat{BDA}$$

۱۹ - گزینه ۱



۲۰ - گزینه ۴ دو مثلث  $PAC$  و  $PBD$  با دو زاویه ی برابر متشابه اند، بنابراین:

$$\frac{PA}{PD} = \frac{PA}{9+7} = \frac{9}{PB} \Rightarrow PA \cdot PB = 9 \times 16$$



از طرفی  $PM$  مماس بر دایره و  $PAB$  قاطع است، بنابراین:

$$PA \cdot PB = PM^2 \Rightarrow PM^2 = 9 \times 16 \Rightarrow PM = 3 \times 4 = 12$$



## پاسخنامه کلیدی

۱ - ۳

۴ - ۲

۷ - ۱

۱۰ - ۴

۱۳ - ۳

۱۶ - ۳

۱۹ - ۱

۲ - ۳

۵ - ۱

۸ - ۳

۱۱ - ۴

۱۴ - ۴

۱۷ - ۱

۲۰ - ۴

۳ - ۱

۶ - ۲

۹ - ۴

۱۲ - ۲

۱۵ - ۲

۱۸ - ۳

